

Supplementary Materials

Analysis of Adaptive Progressive Type-II Hybrid Censored Dagum Data With Applications

Heba S. Mohammed¹, Mazen Nassar ^{2,3*}, Refah Alotaibi¹ and Ahmed Elshahhat⁴

¹Department of Mathematical Sciences, College of Science, Princess Nourah bint Abdulrahman University,
P.O. Box 84428, Riyadh 11671, Saudi Arabia

²Department of Statistics, Faculty of Science, King Abdulaziz University, Jeddah 21589, Kingdom of Saudi Arabia

³Department of Statistics, Faculty of Commerce, Zagazig University, Egypt

⁴Faculty of Technology and Development, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

*Email: mmohamad3@kau.edu.sa and mezo10011@gmail.com

Table S1: The APE (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of α .

T	(n, m)	Scheme	MLE			SE					GE			
						Pr.1 Pr.2					Pr.1 Pr.2			
$\kappa \rightarrow$														
										-2			+2	
0.1	(50,25)	1	0.770	0.608	0.515	0.519	0.164	0.329	0.530	0.134	0.326	0.427	0.126	0.307
						0.474	0.102	0.212	0.406	0.091	0.198	0.421	0.093	0.216
		2	0.768	0.650	0.528	0.502	0.135	0.301	0.510	0.112	0.274	0.298	0.166	0.254
						0.454	0.066	0.152	0.455	0.096	0.138	0.338	0.069	0.156
		3	1.072	0.684	0.625	0.285	0.133	0.289	0.293	0.107	0.268	0.327	0.180	0.355
						0.322	0.086	0.194	0.324	0.076	0.189	0.307	0.096	0.232
	(50,40)	1	0.503	0.488	0.484	0.500	0.134	0.298	0.507	0.110	0.269	0.467	0.082	0.189
						0.456	0.072	0.161	0.479	0.080	0.146	0.437	0.055	0.131
		2	0.498	0.532	0.489	0.484	0.133	0.268	0.494	0.096	0.235	0.324	0.087	0.190
						0.358	0.065	0.112	0.362	0.039	0.096	0.442	0.049	0.113
		3	0.638	0.592	0.518	0.464	0.119	0.258	0.474	0.077	0.185	0.357	0.149	0.314
						0.456	0.080	0.164	0.459	0.061	0.148	0.425	0.063	0.150
	(100,50)	1	0.454	0.203	0.337	0.496	0.128	0.278	0.503	0.103	0.257	0.438	0.079	0.180
						0.368	0.043	0.080	0.458	0.059	0.125	0.362	0.040	0.094
		2	0.468	0.232	0.400	0.394	0.078	0.145	0.401	0.088	0.217	0.471	0.084	0.184
						0.367	0.042	0.082	0.368	0.032	0.079	0.362	0.039	0.094
		3	0.687	0.463	0.471	0.439	0.079	0.144	0.449	0.050	0.123	0.258	0.143	0.285
						0.446	0.069	0.138	0.444	0.045	0.111	0.432	0.043	0.100
	(100,80)	1	0.440	0.141	0.247	0.397	0.054	0.115	0.401	0.094	0.128	0.391	0.028	0.047
						0.404	0.043	0.068	0.369	0.031	0.077	0.386	0.016	0.036
		2	0.433	0.166	0.253	0.350	0.070	0.134	0.353	0.047	0.118	0.437	0.064	0.153
						0.414	0.041	0.062	0.416	0.018	0.040	0.400	0.031	0.066
		3	0.427	0.279	0.393	0.413	0.060	0.109	0.433	0.035	0.083	0.417	0.037	0.087
						0.431	0.052	0.099	0.417	0.023	0.048	0.399	0.020	0.040
0.5	(50,25)	1	0.764	0.284	0.478	0.222	0.188	0.444	0.231	0.169	0.422	0.171	0.236	0.442
						0.474	0.103	0.212	0.479	0.081	0.198	0.294	0.184	0.267
		2	0.783	0.381	0.509	0.229	0.182	0.427	0.238	0.162	0.406	0.176	0.232	0.459
						0.352	0.072	0.133	0.363	0.089	0.193	0.291	0.187	0.273
		3	1.024	0.418	0.597	0.528	0.176	0.347	0.541	0.144	0.353	0.447	0.101	0.241
						0.481	0.097	0.223	0.484	0.084	0.209	0.455	0.075	0.174
	(50,40)	1	0.513	0.250	0.428	0.530	0.161	0.355	0.538	0.138	0.346	0.410	0.157	0.368
						0.460	0.095	0.170	0.465	0.068	0.163	0.420	0.094	0.218
		2	0.510	0.361	0.462	0.513	0.149	0.301	0.522	0.124	0.304	0.288	0.132	0.281
						0.360	0.060	0.106	0.401	0.074	0.118	0.325	0.083	0.188
		3	0.556	0.386	0.507	0.518	0.161	0.356	0.529	0.131	0.322	0.485	0.096	0.218
						0.433	0.057	0.109	0.436	0.037	0.089	0.353	0.067	0.140
	(100,50)	1	0.449	0.198	0.332	0.510	0.156	0.208	0.521	0.124	0.302	0.421	0.122	0.295
						0.340	0.069	0.150	0.342	0.058	0.145	0.331	0.072	0.174
		2	0.453	0.222	0.402	0.326	0.086	0.185	0.329	0.071	0.177	0.486	0.089	0.215
						0.397	0.058	0.077	0.356	0.044	0.109	0.332	0.081	0.170
		3	0.714	0.311	0.419	0.497	0.116	0.265	0.501	0.102	0.252	0.474	0.085	0.195
						0.382	0.050	0.078	0.385	0.016	0.039	0.398	0.065	0.117
	(100,80)	1	0.436	0.151	0.217	0.503	0.118	0.174	0.506	0.107	0.206	0.488	0.093	0.209
						0.398	0.057	0.077	0.402	0.046	0.110	0.438	0.050	0.115
		2	0.439	0.157	0.237	0.353	0.085	0.141	0.360	0.042	0.100	0.332	0.070	0.171
						0.393	0.045	0.054	0.396	0.029	0.095	0.364	0.065	0.092
		3	0.423	0.247	0.263	0.383	0.065	0.118	0.414	0.015	0.035	0.350	0.068	0.125
						0.411	0.051	0.074	0.388	0.013	0.031	0.381	0.054	0.092

Table S2: The APE (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of β .

T	(n, m)	Scheme	MLE			SE					GE			
						Pr.1 Pr.2			Pr.1 Pr.2					
$\kappa \rightarrow$										-2			+2	
0.1	(50,25)	1	0.354	0.628	0.515	0.156	0.080	0.295	0.157	0.048	0.220	0.143	0.057	0.283
						0.151	0.070	0.248	0.166	0.047	0.218	0.144	0.056	0.282
		2	0.439	0.775	0.744	0.157	0.079	0.291	0.167	0.046	0.214	0.141	0.059	0.295
						0.165	0.050	0.213	0.220	0.021	0.101	0.161	0.040	0.197
		3	0.419	0.472	0.726	0.275	0.092	0.382	0.280	0.080	0.401	0.260	0.061	0.302
						0.266	0.072	0.330	0.267	0.068	0.337	0.259	0.059	0.296
	(50,40)	1	0.240	0.294	0.206	0.179	0.067	0.252	0.159	0.042	0.205	0.149	0.051	0.254
						0.182	0.052	0.152	0.188	0.021	0.100	0.174	0.026	0.129
		2	0.257	0.364	0.254	0.154	0.072	0.287	0.162	0.044	0.204	0.144	0.056	0.280
						0.193	0.043	0.135	0.188	0.017	0.080	0.179	0.022	0.105
		3	0.407	0.365	0.634	0.255	0.077	0.277	0.260	0.063	0.299	0.245	0.046	0.226
						0.213	0.050	0.125	0.218	0.025	0.090	0.181	0.019	0.093
	(100,50)	1	0.213	0.118	0.129	0.156	0.056	0.194	0.188	0.030	0.139	0.167	0.034	0.165
						0.184	0.039	0.130	0.188	0.018	0.084	0.178	0.024	0.112
		2	0.251	0.346	0.243	0.218	0.034	0.116	0.168	0.035	0.161	0.185	0.016	0.073
						0.185	0.038	0.124	0.197	0.016	0.071	0.214	0.014	0.069
		3	0.379	0.314	0.602	0.173	0.056	0.200	0.234	0.035	0.171	0.163	0.037	0.183
						0.188	0.042	0.134	0.192	0.016	0.076	0.206	0.018	0.032
	(100,80)	1	0.204	0.047	0.081	0.197	0.028	0.107	0.214	0.018	0.069	0.192	0.019	0.038
						0.211	0.036	0.079	0.199	0.014	0.014	0.208	0.018	0.038
		2	0.208	0.076	0.097	0.190	0.034	0.104	0.193	0.011	0.052	0.186	0.014	0.070
						0.202	0.025	0.083	0.204	0.007	0.021	0.199	0.013	0.015
		3	0.302	0.298	0.344	0.232	0.047	0.167	0.179	0.028	0.131	0.226	0.026	0.130
						0.199	0.041	0.100	0.203	0.016	0.057	0.193	0.017	0.040
0.5	(50,25)	1	0.403	0.819	0.634	0.324	0.134	0.418	0.328	0.128	0.439	0.310	0.110	0.450
						0.183	0.054	0.160	0.233	0.033	0.165	0.227	0.027	0.133
		2	0.503	0.959	0.905	0.317	0.127	0.585	0.321	0.121	0.405	0.304	0.104	0.420
						0.229	0.042	0.153	0.232	0.033	0.161	0.228	0.028	0.138
		3	0.418	0.497	0.733	0.155	0.089	0.311	0.169	0.049	0.234	0.141	0.059	0.294
						0.176	0.040	0.154	0.179	0.023	0.108	0.172	0.028	0.140
	(50,40)	1	0.265	0.385	0.266	0.182	0.065	0.191	0.184	0.031	0.146	0.167	0.034	0.166
						0.231	0.052	0.151	0.222	0.023	0.109	0.175	0.025	0.127
		2	0.283	0.465	0.319	0.144	0.086	0.348	0.271	0.071	0.354	0.129	0.072	0.356
						0.231	0.041	0.153	0.232	0.033	0.162	0.227	0.027	0.135
		3	0.424	0.371	0.670	0.180	0.070	0.195	0.190	0.033	0.152	0.167	0.033	0.163
						0.186	0.047	0.132	0.190	0.020	0.095	0.180	0.021	0.102
	(100,50)	1	0.225	0.230	0.155	0.176	0.064	0.184	0.191	0.028	0.128	0.170	0.031	0.150
						0.201	0.043	0.119	0.188	0.023	0.098	0.217	0.019	0.083
		2	0.269	0.366	0.284	0.269	0.075	0.347	0.154	0.055	0.252	0.265	0.065	0.325
						0.231	0.040	0.158	0.231	0.031	0.156	0.225	0.025	0.123
		3	0.365	0.308	0.581	0.174	0.051	0.181	0.178	0.028	0.131	0.170	0.031	0.152
						0.198	0.038	0.091	0.190	0.013	0.062	0.185	0.015	0.073
	(100,80)	1	0.207	0.093	0.091	0.220	0.034	0.116	0.207	0.021	0.078	0.193	0.017	0.042
						0.210	0.033	0.104	0.212	0.014	0.060	0.204	0.015	0.021
		2	0.208	0.072	0.104	0.219	0.035	0.144	0.221	0.021	0.104	0.205	0.016	0.063
						0.209	0.024	0.095	0.210	0.010	0.049	0.213	0.013	0.026
		3	0.286	0.263	0.302	0.213	0.033	0.118	0.215	0.016	0.077	0.208	0.018	0.040
						0.188	0.030	0.074	0.201	0.013	0.049	0.194	0.016	0.030

Table S3: The APE (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of θ .

T	(n, m)	Scheme	MLE			SE					GE			
						Pr.1 Pr.2					Pr.1 Pr.2			
$\kappa \rightarrow$										-2			+2	
0.1	(50,25)	1	0.100	0.094	0.664	0.302	0.085	0.519	0.113	0.066	0.435	0.077	0.086	0.436
						0.196	0.073	0.465	0.114	0.065	0.352	0.103	0.075	0.354
		2	0.099	0.118	0.782	0.269	0.109	0.592	0.283	0.102	0.525	0.216	0.097	0.593
						0.114	0.072	0.517	0.116	0.069	0.384	0.106	0.059	0.479
		3	0.049	0.087	0.785	0.264	0.083	0.661	0.052	0.070	0.497	0.028	0.072	0.619
						0.173	0.078	0.637	0.175	0.076	0.354	0.166	0.067	0.564
	(50,40)	1	0.104	0.067	0.498	0.156	0.064	0.419	0.165	0.029	0.351	0.126	0.056	0.262
						0.163	0.060	0.339	0.165	0.021	0.133	0.155	0.028	0.255
		2	0.102	0.069	0.516	0.188	0.066	0.413	0.174	0.060	0.436	0.129	0.063	0.433
						0.166	0.040	0.371	0.168	0.031	0.301	0.158	0.018	0.168
		3	0.059	0.079	0.692	0.045	0.066	0.609	0.270	0.049	0.476	0.240	0.054	0.528
						0.080	0.048	0.419	0.084	0.031	0.305	0.074	0.053	0.400
	(100,50)	1	0.104	0.060	0.429	0.107	0.039	0.329	0.311	0.015	0.287	0.274	0.023	0.232
						0.126	0.036	0.310	0.200	0.013	0.109	0.185	0.019	0.098
		2	0.102	0.068	0.491	0.163	0.063	0.385	0.059	0.062	0.414	0.027	0.048	0.291
						0.127	0.028	0.314	0.130	0.017	0.196	0.117	0.017	0.065
		3	0.068	0.067	0.555	0.045	0.063	0.596	0.055	0.047	0.449	0.024	0.046	0.359
						0.063	0.034	0.257	0.070	0.019	0.177	0.047	0.026	0.257
	(100,80)	1	0.101	0.042	0.320	0.104	0.036	0.261	0.110	0.013	0.144	0.091	0.019	0.181
						0.113	0.025	0.194	0.129	0.010	0.100	0.118	0.011	0.089
		2	0.102	0.045	0.343	0.047	0.044	0.299	0.202	0.040	0.216	0.147	0.031	0.174
						0.108	0.021	0.143	0.110	0.010	0.165	0.103	0.015	0.035
		3	0.082	0.052	0.408	0.095	0.048	0.400	0.106	0.013	0.191	0.062	0.038	0.282
						0.110	0.028	0.225	0.113	0.011	0.127	0.101	0.013	0.125
0.5	(50,25)	1	0.102	0.141	0.716	0.103	0.084	0.560	0.110	0.082	0.473	0.073	0.075	0.451
						0.112	0.063	0.497	0.114	0.049	0.440	0.103	0.071	0.355
		2	0.110	0.219	0.929	0.381	0.192	0.614	0.389	0.189	0.598	0.338	0.144	0.479
						0.124	0.062	0.558	0.127	0.044	0.396	0.117	0.062	0.361
		3	0.050	0.087	0.785	0.088	0.068	0.537	0.095	0.060	0.582	0.067	0.042	0.355
						0.156	0.067	0.508	0.160	0.058	0.502	0.142	0.035	0.416
	(50,40)	1	0.096	0.065	0.497	0.055	0.062	0.477	0.068	0.046	0.402	0.025	0.056	0.269
						0.050	0.060	0.453	0.060	0.044	0.329	0.034	0.027	0.318
		2	0.095	0.071	0.522	0.053	0.058	0.461	0.067	0.037	0.338	0.022	0.068	0.377
						0.051	0.036	0.283	0.060	0.028	0.271	0.034	0.049	0.218
		3	0.070	0.079	0.684	0.130	0.050	0.447	0.134	0.047	0.464	0.118	0.040	0.331
						0.085	0.046	0.360	0.088	0.034	0.339	0.073	0.033	0.394
	(100,50)	1	0.101	0.060	0.433	0.141	0.042	0.350	0.147	0.036	0.360	0.124	0.032	0.246
						0.135	0.039	0.320	0.136	0.012	0.143	0.132	0.025	0.142
		2	0.099	0.067	0.507	0.201	0.064	0.489	0.228	0.035	0.319	0.128	0.052	0.278
						0.106	0.033	0.268	0.110	0.018	0.099	0.100	0.022	0.167
		3	0.063	0.068	0.568	0.152	0.043	0.346	0.158	0.021	0.206	0.135	0.027	0.176
						0.145	0.030	0.234	0.146	0.016	0.117	0.139	0.018	0.273
	(100,80)	1	0.100	0.045	0.338	0.091	0.038	0.271	0.098	0.015	0.106	0.075	0.024	0.239
						0.180	0.025	0.195	0.181	0.010	0.100	0.174	0.011	0.101
		2	0.101	0.047	0.351	0.061	0.041	0.228	0.068	0.032	0.278	0.048	0.035	0.123
						0.091	0.029	0.171	0.096	0.013	0.074	0.078	0.017	0.108
		3	0.084	0.049	0.391	0.112	0.038	0.308	0.121	0.018	0.178	0.090	0.016	0.101
						0.091	0.023	0.177	0.093	0.012	0.079	0.084	0.010	0.158

Table S4: The APE (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of $R(t)$.

T	(n, m)	Scheme	MLE			SE				GE				
						Pr.1 Pr.2				Pr.1 Pr.2				
$\kappa \rightarrow$										-2		+2		
0.1	(50,25)	1	0.049	0.135	0.663	0.056	0.074	0.584	0.060	0.071	0.575	0.041	0.054	0.447
						0.055	0.046	0.437	0.056	0.045	0.433	0.048	0.037	0.365
		2	0.052	0.146	0.862	0.119	0.088	0.613	0.127	0.084	0.676	0.086	0.045	0.510
						0.049	0.023	0.429	0.050	0.020	0.456	0.046	0.017	0.382
		3	0.055	0.177	0.910	0.022	0.063	0.537	0.024	0.061	0.682	0.015	0.050	0.650
						0.077	0.038	0.421	0.079	0.037	0.555	0.072	0.030	0.503
	(50,40)	1	0.048	0.107	0.486	0.077	0.046	0.360	0.083	0.041	0.401	0.058	0.018	0.361
						0.060	0.020	0.337	0.061	0.019	0.315	0.058	0.018	0.253
		2	0.049	0.106	0.533	0.081	0.050	0.458	0.087	0.045	0.441	0.060	0.031	0.335
						0.061	0.021	0.359	0.062	0.018	0.392	0.059	0.012	0.269
		3	0.040	0.153	0.704	0.101	0.025	0.492	0.104	0.020	0.439	0.092	0.031	0.599
						0.028	0.018	0.378	0.029	0.018	0.324	0.027	0.019	0.440
	(100,50)	1	0.047	0.094	0.430	0.109	0.025	0.267	0.113	0.017	0.348	0.096	0.017	0.172
						0.086	0.017	0.198	0.087	0.013	0.256	0.079	0.015	0.107
		2	0.049	0.090	0.455	0.018	0.028	0.380	0.021	0.033	0.370	0.012	0.019	0.317
						0.058	0.020	0.289	0.059	0.017	0.246	0.054	0.010	0.177
		3	0.049	0.135	0.610	0.020	0.023	0.423	0.022	0.018	0.373	0.012	0.028	0.421
						0.031	0.015	0.333	0.034	0.014	0.212	0.024	0.015	0.360
	(100,80)	1	0.045	0.079	0.334	0.053	0.018	0.215	0.055	0.014	0.287	0.047	0.016	0.144
						0.053	0.015	0.130	0.054	0.012	0.203	0.050	0.013	0.104
		2	0.046	0.081	0.372	0.063	0.026	0.245	0.066	0.022	0.252	0.053	0.011	0.237
						0.040	0.016	0.197	0.041	0.012	0.182	0.039	0.009	0.098
		3	0.040	0.127	0.532	0.030	0.021	0.386	0.035	0.014	0.187	0.018	0.025	0.380
						0.050	0.014	0.254	0.051	0.011	0.126	0.046	0.014	0.278
0.5	(50,25)	1	0.047	0.131	0.684	0.053	0.043	0.588	0.057	0.042	0.554	0.038	0.036	0.543
						0.055	0.037	0.520	0.056	0.033	0.476	0.048	0.028	0.447
		2	0.049	0.142	0.840	0.164	0.129	0.460	0.169	0.127	0.607	0.141	0.101	0.581
						0.047	0.051	0.419	0.048	0.020	0.472	0.043	0.028	0.359
		3	0.057	0.172	0.705	0.036	0.036	0.645	0.039	0.034	0.677	0.027	0.025	0.590
						0.064	0.031	0.545	0.066	0.029	0.542	0.057	0.022	0.555
	(50,40)	1	0.045	0.096	0.511	0.014	0.030	0.478	0.017	0.026	0.404	0.006	0.035	0.470
						0.021	0.024	0.337	0.022	0.020	0.314	0.015	0.020	0.140
		2	0.046	0.093	0.567	0.014	0.032	0.381	0.017	0.027	0.482	0.006	0.037	0.448
						0.021	0.024	0.232	0.022	0.015	0.128	0.015	0.018	0.299
		3	0.039	0.136	0.511	0.068	0.033	0.400	0.071	0.029	0.491	0.059	0.017	0.390
						0.034	0.026	0.363	0.035	0.023	0.382	0.030	0.014	0.329
	(100,50)	1	0.046	0.090	0.444	0.071	0.024	0.431	0.075	0.016	0.345	0.063	0.017	0.104
						0.048	0.019	0.240	0.049	0.015	0.242	0.047	0.016	0.099
		2	0.047	0.091	0.479	0.065	0.031	0.295	0.069	0.026	0.415	0.051	0.025	0.315
						0.039	0.017	0.123	0.040	0.013	0.081	0.038	0.012	0.207
		3	0.053	0.125	0.445	0.074	0.023	0.333	0.076	0.018	0.399	0.068	0.016	0.362
						0.070	0.018	0.235	0.072	0.017	0.188	0.066	0.012	0.289
	(100,80)	1	0.045	0.076	0.350	0.050	0.018	0.320	0.052	0.013	0.223	0.040	0.014	0.072
						0.082	0.017	0.173	0.084	0.010	0.175	0.077	0.010	0.053
		2	0.046	0.080	0.392	0.022	0.022	0.185	0.023	0.019	0.250	0.018	0.015	0.201
						0.038	0.011	0.111	0.039	0.012	0.066	0.034	0.010	0.132
		3	0.040	0.116	0.227	0.057	0.016	0.207	0.060	0.015	0.095	0.048	0.015	0.148
						0.041	0.012	0.164	0.042	0.014	0.010	0.038	0.011	0.107

Table S5: The APE (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of $h(t)$.

T	(n, m)	Scheme	MLE			SE				GE					
						Pr.1 Pr.2		Pr.1 Pr.2		Pr.1 Pr.2					
$\kappa \rightarrow$										-2		+2			
0.1	(50,25)	1	0.681	0.926	0.916	0.330	0.155	0.335	0.346	0.109	0.287	0.306	0.129	0.347	
						0.333	0.141	0.341	0.343	0.104	0.260	0.319	0.123	0.330	
		2	0.852	0.956	0.962	0.257	0.155	0.356	0.274	0.105	0.262	0.229	0.142	0.382	
						0.354	0.096	0.226	0.361	0.070	0.176	0.340	0.080	0.214	
		3	0.824	0.954	1.097	0.491	0.184	0.406	0.499	0.158	0.425	0.472	0.120	0.322	
						0.331	0.142	0.352	0.338	0.134	0.359	0.318	0.109	0.293	
	(50,40)	1	0.451	0.591	0.440	0.279	0.132	0.322	0.299	0.094	0.234	0.252	0.120	0.321	
						0.329	0.094	0.157	0.335	0.044	0.106	0.316	0.057	0.148	
		2	0.486	0.731	0.548	0.279	0.144	0.321	0.300	0.093	0.232	0.251	0.120	0.322	
						0.330	0.079	0.154	0.336	0.043	0.104	0.318	0.055	0.142	
		3	0.793	0.746	0.938	0.291	0.153	0.325	0.303	0.131	0.345	0.271	0.102	0.273	
						0.501	0.094	0.162	0.504	0.053	0.116	0.490	0.054	0.143	
	(100,50)	1	0.398	0.237	0.276	0.257	0.123	0.199	0.264	0.055	0.138	0.242	0.066	0.175	
						0.262	0.079	0.128	0.275	0.040	0.102	0.248	0.052	0.139	
		2	0.475	0.696	0.529	0.422	0.077	0.155	0.425	0.055	0.146	0.412	0.045	0.121	
						0.300	0.075	0.140	0.306	0.030	0.073	0.292	0.034	0.084	
		3	0.742	0.645	0.833	0.448	0.121	0.267	0.452	0.082	0.219	0.436	0.100	0.268	
						0.405	0.083	0.152	0.414	0.041	0.103	0.390	0.023	0.052	
	(100,80)	1	0.378	0.093	0.174	0.364	0.061	0.115	0.368	0.027	0.115	0.353	0.018	0.048	
						0.384	0.054	0.076	0.388	0.016	0.048	0.377	0.010	0.020	
		2	0.387	0.154	0.209	0.336	0.071	0.140	0.341	0.033	0.083	0.326	0.042	0.112	
						0.374	0.042	0.080	0.376	0.012	0.019	0.369	0.016	0.016	
		3	0.579	0.605	0.748	0.516	0.100	0.212	0.528	0.077	0.191	0.479	0.065	0.175	
						0.366	0.075	0.110	0.373	0.027	0.058	0.354	0.020	0.049	
	0.5	(50,25)	1	0.768	0.905	0.843	0.336	0.275	0.683	0.351	0.263	0.608	0.312	0.223	0.601
							0.334	0.099	0.203	0.344	0.078	0.208	0.320	0.065	0.174
			2	0.961	0.917	0.907	0.225	0.264	0.651	0.248	0.251	0.675	0.196	0.213	0.572
							0.381	0.091	0.194	0.384	0.074	0.199	0.375	0.061	0.164
			3	0.821	1.004	0.961	0.400	0.167	0.327	0.404	0.095	0.241	0.388	0.117	0.315
							0.315	0.089	0.182	0.320	0.054	0.138	0.307	0.064	0.173
(50,40)		1	0.502	0.771	0.573	0.624	0.121	0.214	0.633	0.062	0.159	0.594	0.075	0.198	
						0.445	0.094	0.156	0.448	0.041	0.101	0.435	0.051	0.137	
		2	0.538	0.834	0.689	0.612	0.189	0.455	0.621	0.147	0.397	0.583	0.176	0.473	
						0.441	0.074	0.160	0.445	0.063	0.159	0.432	0.054	0.144	
		3	0.827	0.758	0.847	0.280	0.127	0.210	0.306	0.061	0.153	0.254	0.074	0.200	
						0.354	0.080	0.157	0.357	0.044	0.110	0.348	0.051	0.136	
(100,50)		1	0.422	0.460	0.334	0.316	0.118	0.189	0.331	0.050	0.125	0.297	0.060	0.158	
						0.400	0.093	0.135	0.403	0.039	0.099	0.393	0.037	0.094	
		2	0.511	0.735	0.617	0.383	0.155	0.389	0.387	0.138	0.339	0.372	0.135	0.362	
						0.427	0.055	0.156	0.430	0.060	0.043	0.420	0.049	0.132	
		3	0.713	0.631	0.658	0.309	0.100	0.202	0.318	0.060	0.132	0.297	0.062	0.165	
						0.333	0.067	0.082	0.341	0.021	0.052	0.321	0.023	0.060	
(100,80)		1	0.386	0.184	0.195	0.389	0.062	0.114	0.393	0.034	0.086	0.378	0.023	0.060	
						0.351	0.058	0.104	0.362	0.024	0.061	0.336	0.018	0.019	
		2	0.388	0.146	0.224	0.515	0.077	0.122	0.518	0.017	0.167	0.505	0.016	0.112	
						0.430	0.044	0.096	0.433	0.014	0.034	0.424	0.013	0.082	
		3	0.547	0.533	0.284	0.330	0.065	0.135	0.347	0.034	0.089	0.310	0.017	0.046	
						0.369	0.052	0.076	0.375	0.020	0.042	0.362	0.010	0.025	

Table S6: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of α .

T Prior \rightarrow	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
			ACL	CP	1		2	
					ACL	CP	ACL	CP
0.1	(50,25)	1	1.016	0.904	0.378	0.934	0.200	0.954
		2	1.066	0.894	0.319	0.925	0.155	0.944
		3	1.139	0.881	0.329	0.921	0.168	0.935
	(50,40)	1	0.961	0.938	0.296	0.944	0.132	0.977
		2	0.983	0.926	0.294	0.942	0.106	0.969
		3	0.991	0.919	0.229	0.960	0.165	0.975
	(100,50)	1	0.760	0.950	0.289	0.954	0.123	0.980
		2	0.827	0.936	0.181	0.968	0.103	0.976
		3	0.961	0.927	0.226	0.961	0.120	0.980
	(100,80)	1	0.599	0.973	0.186	0.969	0.085	0.983
		2	0.592	0.957	0.119	0.980	0.081	0.980
		3	0.874	0.944	0.224	0.961	0.116	0.982
0.5	(50,25)	1	0.993	0.914	0.396	0.931	0.224	0.947
		2	1.017	0.906	0.340	0.920	0.169	0.941
		3	1.057	0.902	0.371	0.915	0.160	0.933
	(50,40)	1	0.898	0.923	0.291	0.945	0.201	0.965
		2	0.946	0.918	0.237	0.950	0.167	0.959
		3	0.984	0.910	0.357	0.955	0.152	0.976
	(100,50)	1	0.745	0.938	0.241	0.959	0.166	0.975
		2	0.798	0.923	0.214	0.966	0.136	0.970
		3	0.857	0.920	0.233	0.960	0.139	0.978
	(100,80)	1	0.594	0.957	0.182	0.970	0.119	0.977
		2	0.600	0.952	0.149	0.978	0.121	0.975
		3	0.841	0.940	0.216	0.963	0.111	0.979

Table S7: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of β .

T Prior \rightarrow	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
			ACL	CP	1		2	
					ACL	CP	ACL	CP
0.1	(50,25)	1	0.595	0.919	0.166	0.947	0.135	0.951
		2	0.837	0.907	0.161	0.950	0.118	0.955
		3	0.871	0.902	0.181	0.938	0.128	0.953
	(50,40)	1	0.329	0.940	0.160	0.955	0.112	0.963
		2	0.377	0.934	0.154	0.962	0.109	0.974
		3	0.759	0.922	0.157	0.958	0.114	0.961
	(100,50)	1	0.256	0.959	0.105	0.972	0.103	0.975
		2	0.344	0.948	0.094	0.976	0.084	0.979
		3	0.590	0.935	0.143	0.964	0.109	0.969
	(100,80)	1	0.174	0.963	0.102	0.978	0.087	0.988
		2	0.194	0.958	0.086	0.979	0.075	0.986
		3	0.492	0.944	0.115	0.973	0.105	0.978
0.5	(50,25)	1	0.634	0.916	0.183	0.935	0.135	0.950
		2	0.956	0.903	0.180	0.937	0.105	0.958
		3	0.984	0.895	0.175	0.939	0.116	0.956
	(50,40)	1	0.373	0.931	0.165	0.947	0.125	0.959
		2	0.441	0.927	0.172	0.942	0.087	0.981
		3	0.905	0.914	0.153	0.951	0.088	0.966
	(100,50)	1	0.286	0.952	0.141	0.965	0.104	0.978
		2	0.417	0.943	0.109	0.969	0.079	0.983
		3	0.830	0.923	0.112	0.968	0.082	0.980
	(100,80)	1	0.178	0.960	0.112	0.971	0.086	0.987
		2	0.197	0.957	0.099	0.975	0.073	0.988
		3	0.636	0.936	0.102	0.974	0.069	0.988

Table S8: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of θ .

T Prior \rightarrow	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
			ACL	CP	1		2	
					ACL	CP	ACL	CP
0.1	(50,25)	1	0.296	0.936	0.267	0.947	0.118	0.956
		2	0.360	0.930	0.281	0.943	0.099	0.959
		3	0.369	0.925	0.200	0.955	0.097	0.960
	(50,40)	1	0.238	0.956	0.191	0.965	0.095	0.977
		2	0.239	0.955	0.220	0.962	0.097	0.974
		3	0.298	0.938	0.164	0.974	0.093	0.978
	(100,50)	1	0.205	0.968	0.137	0.977	0.092	0.982
		2	0.221	0.959	0.204	0.969	0.084	0.985
		3	0.207	0.966	0.106	0.980	0.089	0.983
	(100,80)	1	0.158	0.976	0.122	0.981	0.079	0.993
		2	0.164	0.973	0.070	0.985	0.062	0.992
		3	0.163	0.973	0.094	0.983	0.078	0.995
0.5	(50,25)	1	0.281	0.950	0.155	0.962	0.103	0.973
		2	0.322	0.943	0.258	0.948	0.111	0.960
		3	0.343	0.932	0.186	0.955	0.129	0.958
	(50,40)	1	0.221	0.962	0.138	0.973	0.094	0.978
		2	0.272	0.960	0.224	0.965	0.105	0.979
		3	0.281	0.945	0.160	0.971	0.084	0.982
	(100,50)	1	0.200	0.973	0.137	0.984	0.079	0.990
		2	0.221	0.963	0.137	0.984	0.097	0.988
		3	0.208	0.968	0.135	0.982	0.076	0.989
	(100,80)	1	0.153	0.979	0.123	0.986	0.062	0.993
		2	0.163	0.974	0.101	0.982	0.091	0.990
		3	0.170	0.971	0.117	0.985	0.072	0.991

Table S9: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of $R(t)$.

T Prior \rightarrow	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
					1		2	
			ACL	CP	ACL	CP	ACL	CP
0.1	(50,25)	1	0.128	0.920	0.107	0.931	0.056	0.957
		2	0.151	0.912	0.130	0.927	0.040	0.960
		3	0.241	0.894	0.083	0.936	0.053	0.959
	(50,40)	1	0.105	0.935	0.100	0.942	0.049	0.968
		2	0.132	0.924	0.105	0.936	0.037	0.972
		3	0.203	0.913	0.055	0.958	0.045	0.970
	(100,50)	1	0.093	0.941	0.083	0.948	0.039	0.976
		2	0.112	0.934	0.063	0.952	0.031	0.980
		3	0.122	0.930	0.046	0.964	0.039	0.975
	(100,80)	1	0.073	0.953	0.053	0.965	0.030	0.984
		2	0.079	0.950	0.025	0.973	0.020	0.988
		3	0.096	0.937	0.036	0.969	0.018	0.990
0.5	(50,25)	1	0.125	0.926	0.081	0.943	0.057	0.955
		2	0.153	0.911	0.147	0.925	0.037	0.963
		3	0.235	0.900	0.078	0.952	0.056	0.958
	(50,40)	1	0.100	0.941	0.079	0.952	0.049	0.968
		2	0.117	0.939	0.083	0.945	0.035	0.975
		3	0.207	0.912	0.071	0.955	0.043	0.972
	(100,50)	1	0.091	0.947	0.061	0.961	0.030	0.980
		2	0.109	0.945	0.032	0.965	0.031	0.979
		3	0.121	0.931	0.061	0.960	0.039	0.976
	(100,80)	1	0.073	0.954	0.032	0.976	0.025	0.987
		2	0.079	0.952	0.029	0.977	0.021	0.989
		3	0.098	0.936	0.053	0.964	0.029	0.986

Table S10: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% ACI/HPD intervals of $h(t)$.

T Prior \rightarrow	(n, m)	Scheme	ACI		HPD			
					1		2	
			ACL	CP	ACL	CP	ACL	CP
0.1	(50,25)	1	1.173	0.892	0.315	0.918	0.239	0.930
		2	1.663	0.885	0.316	0.917	0.220	0.926
		3	1.800	0.879	0.376	0.910	0.243	0.919
	(50,40)	1	0.644	0.903	0.312	0.925	0.214	0.939
		2	0.744	0.894	0.298	0.931	0.205	0.938
		3	1.488	0.885	0.296	0.932	0.212	0.936
	(100,50)	1	0.502	0.933	0.211	0.942	0.204	0.963
		2	0.687	0.924	0.186	0.953	0.160	0.964
		3	1.232	0.906	0.262	0.938	0.207	0.947
	(100,80)	1	0.341	0.946	0.194	0.954	0.168	0.976
		2	0.384	0.941	0.156	0.962	0.130	0.978
		3	0.990	0.918	0.228	0.945	0.204	0.957
0.5	(50,25)	1	1.254	0.888	0.377	0.912	0.240	0.925
		2	1.903	0.874	0.374	0.913	0.205	0.932
		3	1.718	0.881	0.322	0.924	0.215	0.930
	(50,40)	1	0.737	0.896	0.314	0.927	0.229	0.937
		2	0.875	0.898	0.318	0.924	0.163	0.941
		3	1.424	0.890	0.288	0.935	0.166	0.940
	(100,50)	1	0.564	0.927	0.268	0.937	0.203	0.961
		2	0.832	0.912	0.194	0.952	0.153	0.963
		3	1.304	0.902	0.221	0.947	0.153	0.963
	(100,80)	1	0.348	0.943	0.215	0.951	0.156	0.979
		2	0.389	0.938	0.193	0.957	0.136	0.974
		3	1.280	0.908	0.201	0.953	0.135	0.975

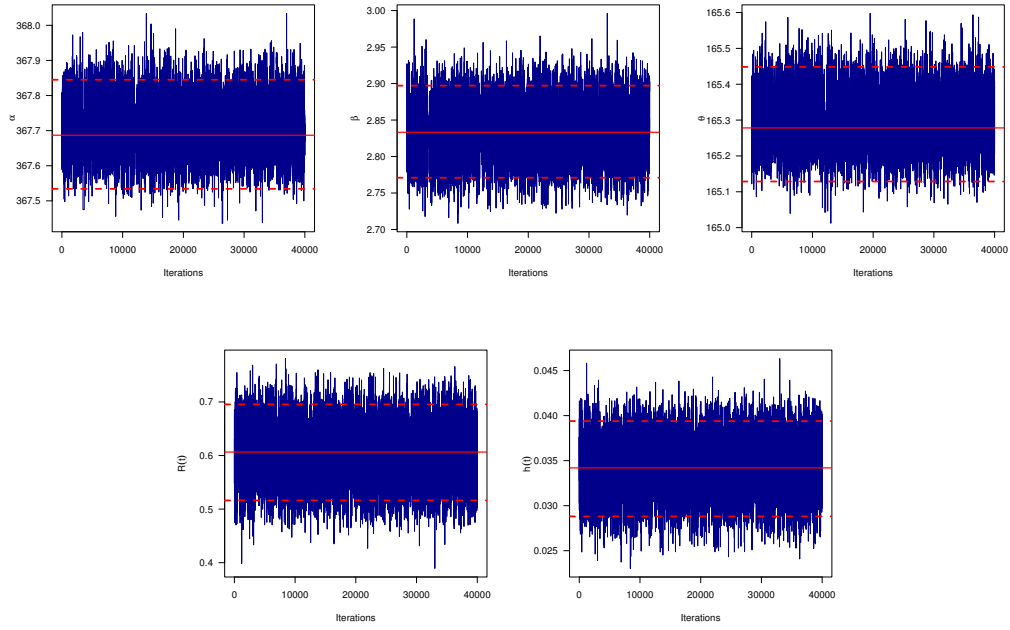


Figure S1: Trace plots of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_2 from coating weight data.

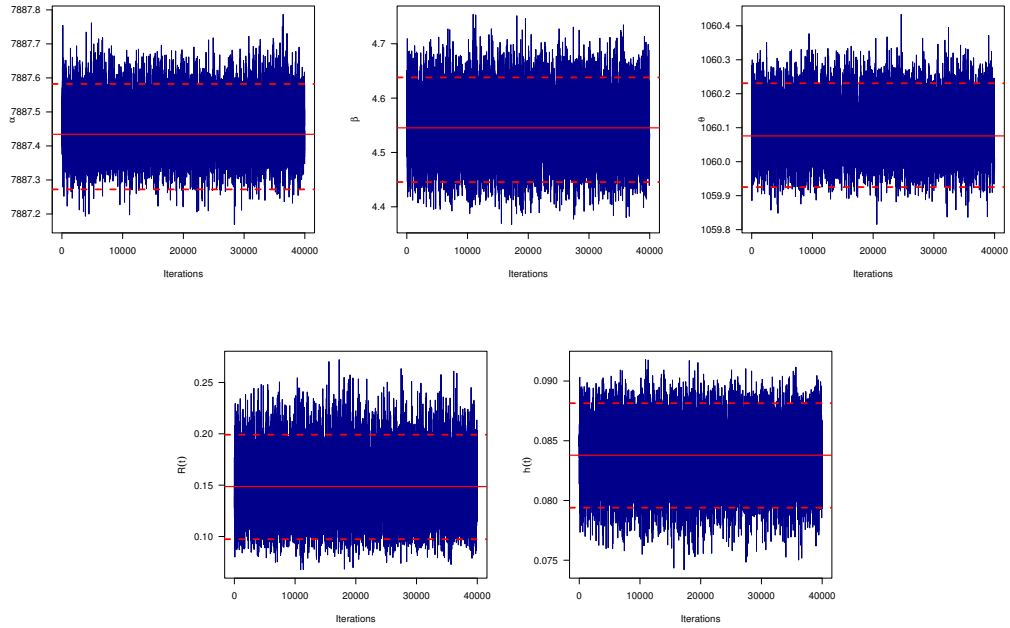


Figure S2: Trace plots of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_3 from coating weight data.

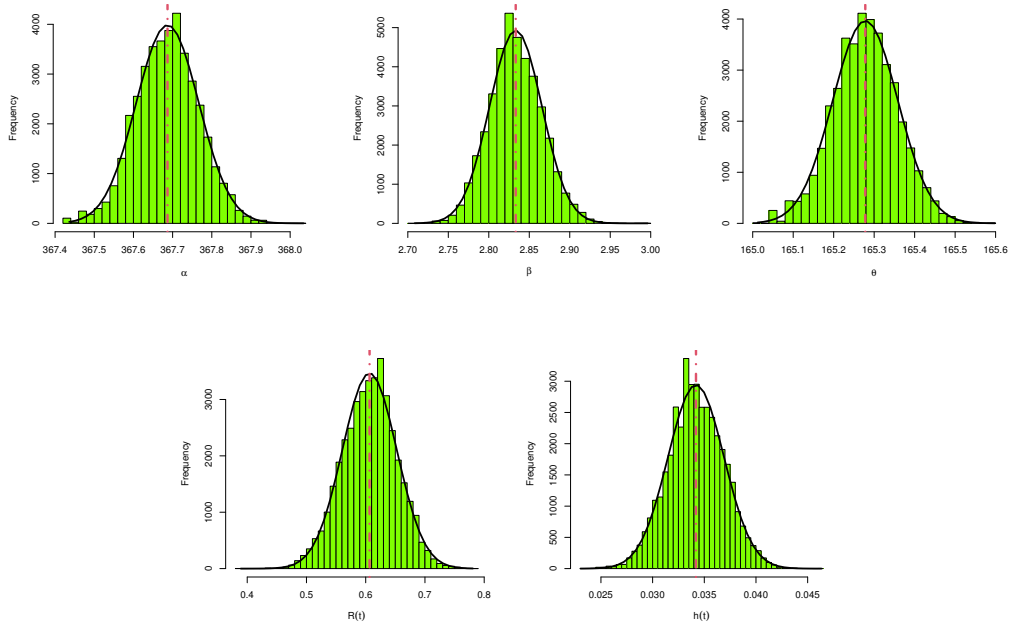


Figure S3: Histograms of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_2 from coating weight data.

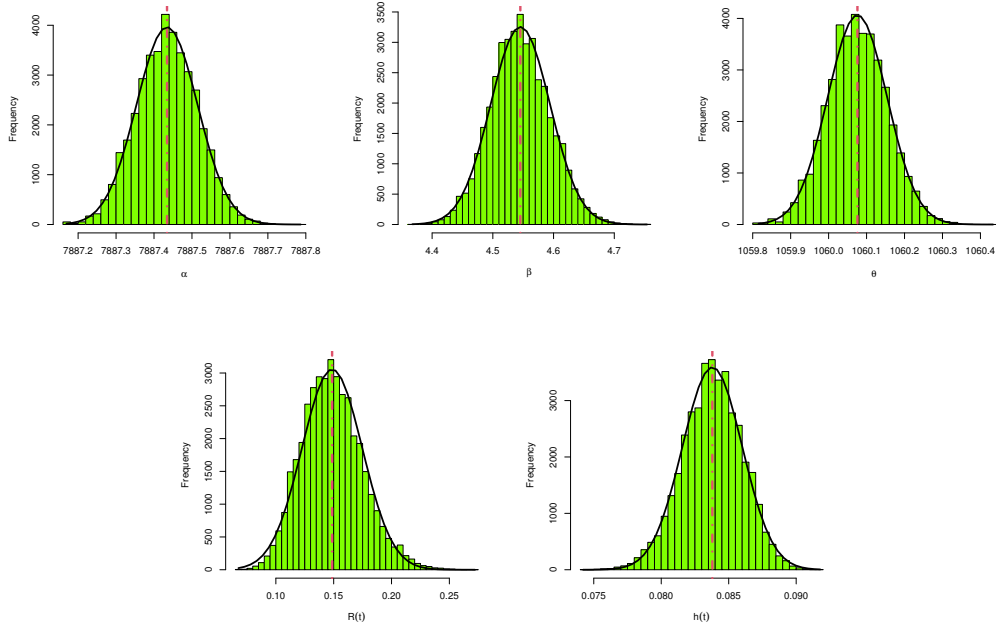


Figure S4: Histograms of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_3 from coating weight data.

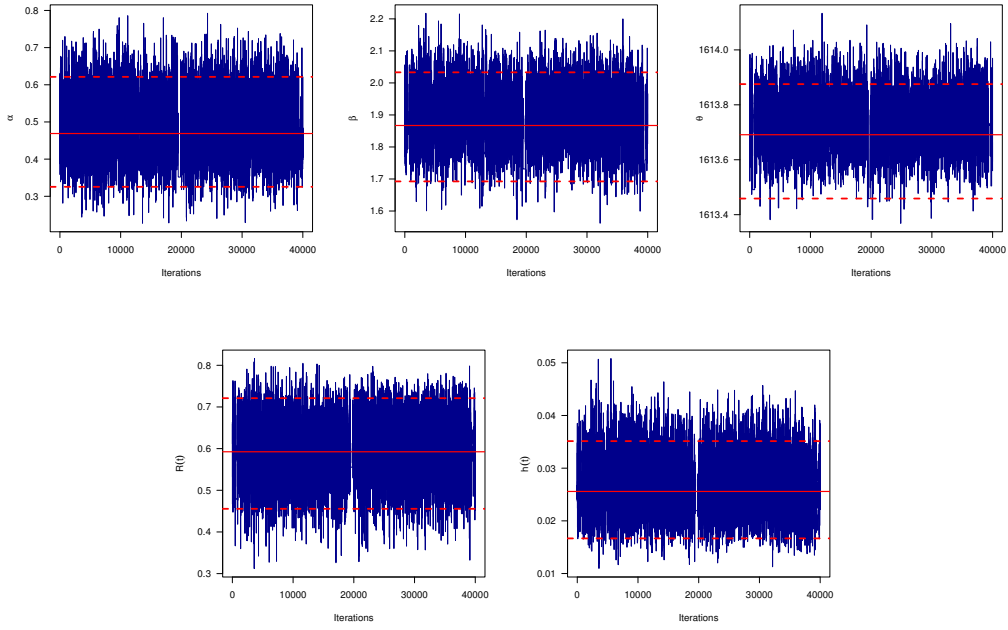


Figure S5: Trace plots of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_2 from electronic components data.

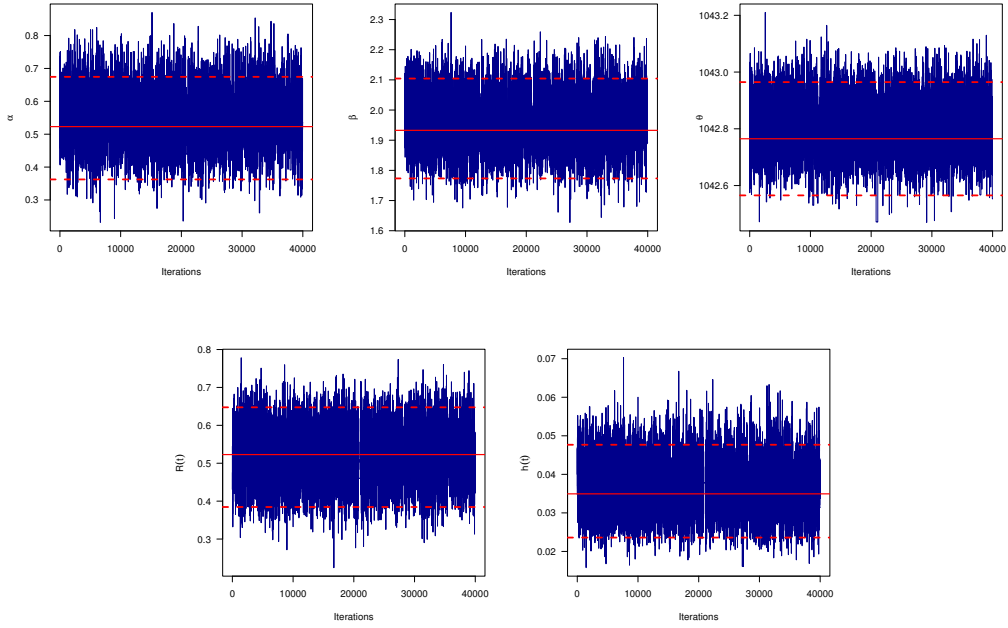


Figure S6: Trace plots of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_3 from electronic components data.

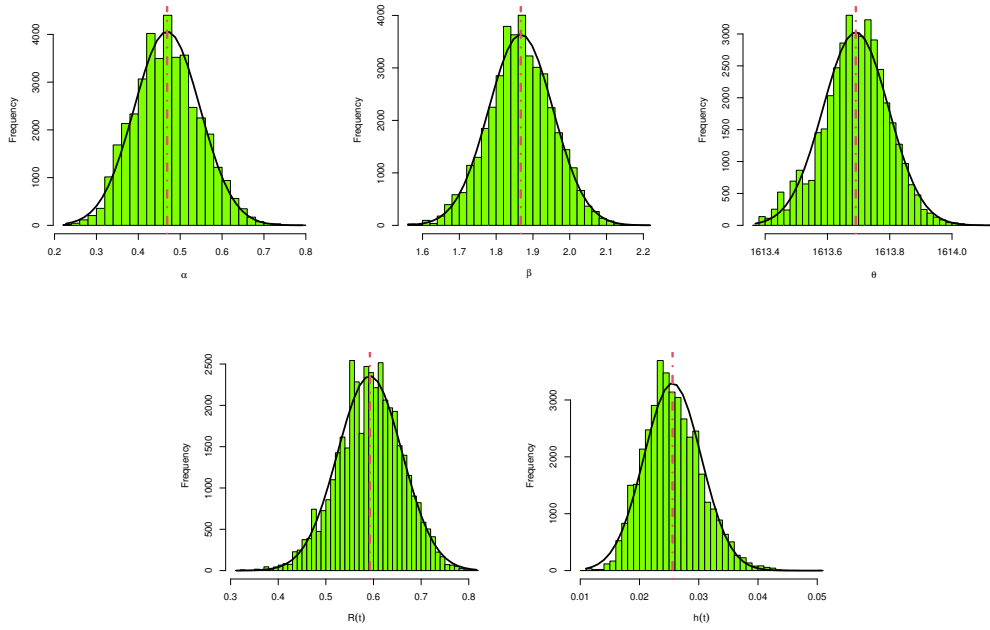


Figure S7: Histograms of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_2 from electronic components data.

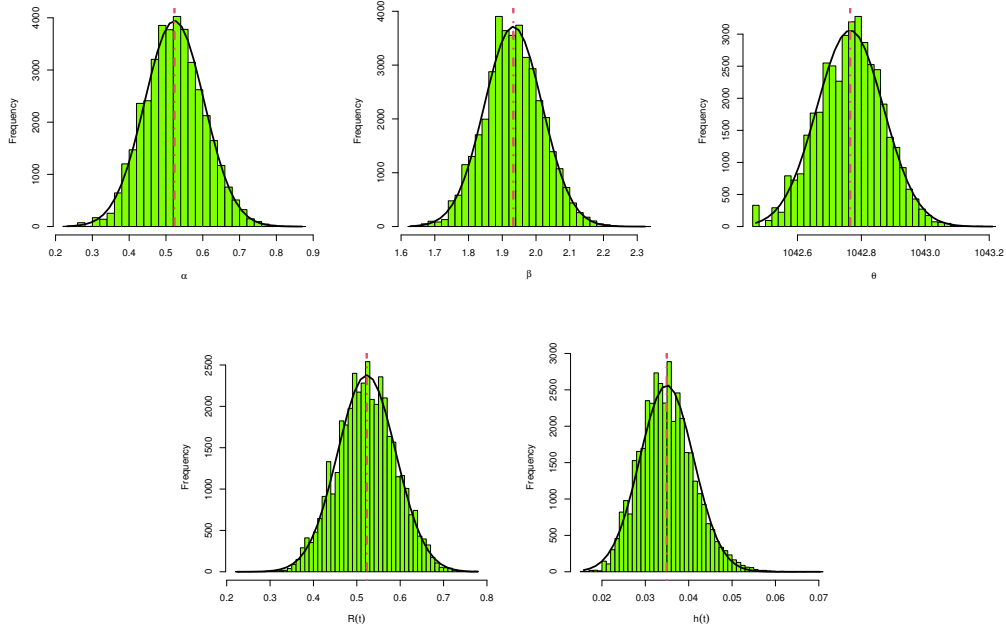


Figure S8: Histograms of α , β , θ , $R(t)$ and $h(t)$ using \mathcal{S}_3 from electronic components data.