

Supplementary Materials

Reliability Estimation of XLindley Constant-Stress Partially Accelerated Life Tests using Progressively Censored Samples

Mazen Nassar^{1,2}, Refah Alotaibi³, and Ahmed Elshahhat^{4*}

¹Faculty of Science, King Abdulaziz University, Jeddah 21589, Saudi Arabia

²Department of Statistics, Faculty of Commerce, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

³Department of Mathematical Sciences, College of Science, Princess Nourah bint Abdulrahman University, P.O. Box 84428, Riyadh 11671, Saudi Arabia

⁴Faculty of Technology and Development, Zagazig University, Zagazig 44519, Egypt

*Email: aelshahhat@ftd.zu.edu.eg

Table S1: Average estimates (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of β .

Set ↓ Prior →	n	m	Scheme	MLE				MCMC				
								1		2		
1	40	20	1	0.3241	0.1806	0.3517	0.3576	0.1461	0.2849	0.3660	0.1379	0.2681
			2	0.3273	0.1771	0.3455	0.3609	0.1426	0.2781	0.3701	0.1337	0.2597
			3	0.3279	0.1758	0.3442	0.3603	0.1431	0.2795	0.3616	0.1416	0.2718
		30	1	0.3377	0.1669	0.3247	0.3672	0.1404	0.2664	0.3680	0.1347	0.2541
			2	0.3578	0.1482	0.2845	0.3710	0.1365	0.2588	0.3844	0.1239	0.2312
			3	0.3565	0.1490	0.2869	0.3639	0.1424	0.2726	0.3817	0.1260	0.2367
	80	40	1	0.3968	0.1074	0.2065	0.4366	0.0692	0.1260	0.4615	0.0655	0.0363
			2	0.3975	0.1066	0.2050	0.4366	0.0692	0.1237	0.4623	0.0665	0.0368
			3	0.3944	0.1092	0.2112	0.4332	0.0725	0.1304	0.4504	0.0686	0.0383
		60	1	0.4403	0.0747	0.1267	0.4472	0.0632	0.1100	0.4606	0.0407	0.0215
			2	0.4415	0.0737	0.1267	0.4487	0.0616	0.1068	0.4614	0.0419	0.0222
			3	0.4367	0.0764	0.1335	0.4422	0.0667	0.1179	0.4484	0.0431	0.0230
2	40	20	1	1.0241	0.4952	0.3177	1.0526	0.4593	0.2983	1.2928	0.2321	0.1381
			2	1.0270	0.4921	0.3158	1.0561	0.4556	0.2959	1.2914	0.2335	0.1391
			3	1.0199	0.4979	0.3204	1.0468	0.4644	0.3022	1.2866	0.2385	0.1423
		30	1	1.0157	0.4939	0.3229	1.1044	0.4121	0.2637	1.3445	0.1757	0.1037
			2	1.0188	0.4906	0.3208	1.1037	0.4124	0.2642	1.3445	0.1757	0.1037
			3	1.0087	0.5005	0.3275	1.1020	0.4138	0.2653	1.3429	0.1775	0.1047
	80	40	1	1.2853	0.2742	0.1590	1.2840	0.2358	0.1445	1.4465	0.0676	0.1120
			2	1.2855	0.2737	0.1588	1.2850	0.2348	0.1438	1.4458	0.0667	0.1105
			3	1.2694	0.2845	0.1667	1.2723	0.2457	0.1520	1.4433	0.0689	0.1118
		60	1	1.2765	0.2542	0.1529	1.3001	0.2242	0.1333	1.4723	0.0561	0.0954
			2	1.2768	0.2537	0.1527	1.3021	0.2228	0.1319	1.4707	0.0553	0.0938
			3	1.2580	0.2693	0.1638	1.2942	0.2291	0.1372	1.4692	0.0638	0.1103

Table S2: Average estimates (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of δ .

Set ↓ Prior →	n	m	Scheme	MLE				MCMC				
								1	2			
1	40	20	1	1.4979	0.3669	0.1948	1.2083	0.3218	0.1933	1.6180	0.1317	0.0789
			2	1.4169	0.3534	0.1946	1.2126	0.3184	0.1918	1.4793	0.0635	0.0331
			3	1.4254	0.3555	0.1938	1.2211	0.3120	0.1861	1.4771	0.0633	0.0321
		30	1	1.3717	0.3484	0.1938	1.2176	0.3166	0.1895	1.4882	0.0599	0.0329
			2	1.3695	0.3476	0.1918	1.2184	0.3153	0.1881	1.4882	0.0592	0.0323
			3	1.4277	0.3445	0.1883	1.2251	0.3106	0.1836	1.4930	0.0578	0.0324
	80	40	1	1.3243	0.2766	0.1549	1.2734	0.2805	0.1580	1.4668	0.0453	0.0257
			2	1.3265	0.2760	0.1543	1.2932	0.2663	0.1492	1.4668	0.0433	0.0237
			3	1.3852	0.2547	0.1395	1.2958	0.2612	0.1462	1.4687	0.0420	0.0228
		60	1	1.3657	0.2666	0.1472	1.2895	0.2674	0.1499	1.4717	0.0397	0.0216
			2	1.3748	0.2646	0.1458	1.2989	0.2645	0.1475	1.4743	0.0378	0.0206
			3	1.4545	0.2529	0.1357	1.4051	0.2613	0.1451	1.4767	0.0353	0.0191
2	40	20	1	2.5633	0.6127	0.1925	2.2391	0.3051	0.1047	2.4959	0.0542	0.0183
			2	2.5204	0.6061	0.1922	2.2351	0.3092	0.1064	2.4958	0.0543	0.0184
			3	2.5160	0.6022	0.1912	2.2548	0.2917	0.0989	2.4950	0.0538	0.0180
		30	1	2.5296	0.5897	0.1873	2.2474	0.2957	0.1017	2.5020	0.0509	0.0176
			2	2.4826	0.5782	0.1855	2.2511	0.2920	0.1002	2.5024	0.0508	0.0176
			3	2.4826	0.5775	0.1853	2.2588	0.2852	0.0971	2.5021	0.0510	0.0176
	80	40	1	2.5029	0.4157	0.1319	2.3392	0.2350	0.0762	2.4766	0.0364	0.0116
			2	2.4474	0.4136	0.1326	2.3407	0.2343	0.0756	2.4764	0.0365	0.0117
			3	2.4433	0.4115	0.1320	2.3429	0.2293	0.0743	2.4767	0.0365	0.0116
		60	1	2.4130	0.3999	0.1287	2.3423	0.2316	0.0748	2.4831	0.0324	0.0106
			2	2.4130	0.3994	0.1285	2.3428	0.2297	0.0743	2.4831	0.0324	0.0106
			3	2.4666	0.4009	0.1275	2.3499	0.2232	0.0723	2.4827	0.0326	0.0107

Table S3: Average estimates (1st column), RMSEs (2nd column) and MRABs (3rd column) of $R_1(t)$.

Set ↓ Prior →	n	m	Scheme	MLE				MCMC				
								1		2		
1	40	20	1	0.9287	0.0650	0.0732	0.9241	0.0603	0.0679	0.9173	0.0532	0.0600
			2	0.9275	0.0634	0.0718	0.9171	0.0538	0.0598	0.9161	0.0520	0.0587
			3	0.9277	0.0638	0.0721	0.9175	0.0541	0.0603	0.9163	0.0521	0.0589
		30	1	0.9138	0.0510	0.0561	0.9143	0.0503	0.0566	0.9137	0.0493	0.0558
			2	0.9124	0.0497	0.0546	0.9128	0.0488	0.0549	0.9077	0.0452	0.0489
			3	0.9149	0.0518	0.0574	0.9159	0.0516	0.0584	0.9087	0.0460	0.0501
	80	40	1	0.9034	0.0395	0.0439	0.8874	0.0275	0.0269	0.5439	0.0182	0.0286
			2	0.9031	0.0392	0.0436	0.8870	0.0272	0.0265	0.5441	0.0185	0.0289
			3	0.9042	0.0402	0.0449	0.8887	0.0282	0.0279	0.5448	0.0191	0.0301
		60	1	0.8898	0.0259	0.0277	0.8849	0.0234	0.0236	0.5367	0.0112	0.0168
			2	0.8888	0.0256	0.0272	0.8844	0.0228	0.0229	0.5371	0.0116	0.0174
			3	0.8901	0.0268	0.0286	0.8868	0.0247	0.0253	0.5376	0.0119	0.0180
2	40	20	1	0.6754	0.1533	0.2809	0.6653	0.1404	0.2576	0.5891	0.0678	0.1135
			2	0.6744	0.1522	0.2788	0.6641	0.1391	0.2553	0.5895	0.0682	0.1144
			3	0.6767	0.1549	0.2852	0.6672	0.1420	0.2612	0.5910	0.0698	0.1171
		30	1	0.6776	0.1521	0.2770	0.6486	0.1251	0.2260	0.5735	0.0505	0.0840
			2	0.6766	0.1510	0.2751	0.6484	0.1250	0.2256	0.5735	0.0505	0.0840
			3	0.6800	0.1541	0.2794	0.6491	0.1255	0.2270	0.5739	0.0510	0.0849
	80	40	1	0.5926	0.0811	0.1318	0.5916	0.0686	0.1186	0.8795	0.0250	0.0240
			2	0.5925	0.0809	0.1316	0.5913	0.0683	0.1181	0.8793	0.0247	0.0237
			3	0.5973	0.0844	0.1386	0.5951	0.0716	0.1251	0.8837	0.0267	0.0261
		60	1	0.5943	0.0746	0.1262	0.5869	0.0654	0.1093	0.8800	0.0208	0.0205
			2	0.5942	0.0745	0.1260	0.5863	0.0649	0.1082	0.8796	0.0205	0.0202
			3	0.5999	0.0793	0.1357	0.5886	0.0668	0.1127	0.8845	0.0236	0.0239

Table S4: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% asymptotic/credible intervals of β .

n	m	Scheme	ACI-NA ACI-NL		BCI HPD			ACI-NA ACI-NL		BCI HPD				
Prior \rightarrow			1			2		1			2			
			Set-1						Set-2					
40	20	1	0.2372	0.925	0.1744	0.943	0.1557	0.962	0.7480	0.847	0.4257	0.905	0.3289	0.920
			0.2398	0.924	0.1703	0.945	0.1453	0.964	0.7586	0.842	0.4216	0.907	0.3237	0.921
		2	0.2351	0.926	0.1721	0.944	0.1497	0.963	0.7460	0.851	0.4204	0.906	0.3236	0.921
			0.2377	0.926	0.1691	0.946	0.1479	0.965	0.7565	0.845	0.4162	0.909	0.3187	0.925
		3	0.2259	0.931	0.1634	0.948	0.1456	0.967	0.7310	0.855	0.4204	0.910	0.3215	0.922
			0.2283	0.929	0.1619	0.949	0.1441	0.968	0.7411	0.852	0.4158	0.912	0.3171	0.925
40	30	1	0.2295	0.928	0.1615	0.950	0.1371	0.971	0.7116	0.875	0.4030	0.919	0.2500	0.933
			0.2332	0.926	0.1492	0.954	0.1275	0.973	0.7260	0.872	0.3757	0.923	0.2456	0.935
		2	0.2259	0.931	0.1629	0.949	0.1489	0.969	0.7071	0.882	0.3991	0.918	0.2500	0.935
			0.2294	0.929	0.1575	0.952	0.1387	0.971	0.7212	0.880	0.3727	0.921	0.2446	0.936
		3	0.2148	0.934	0.1580	0.951	0.1096	0.975	0.6895	0.887	0.3939	0.920	0.2525	0.932
			0.2179	0.933	0.1529	0.953	0.1053	0.976	0.7027	0.883	0.3663	0.922	0.2483	0.934
80	40	1	0.1669	0.942	0.1411	0.959	0.1033	0.976	0.5235	0.905	0.3530	0.927	0.1384	0.946
			0.1678	0.941	0.1311	0.961	0.0995	0.978	0.5272	0.903	0.3376	0.930	0.1349	0.949
		2	0.1654	0.943	0.1361	0.960	0.1085	0.976	0.5220	0.907	0.3523	0.927	0.1400	0.946
			0.1663	0.942	0.1296	0.964	0.1043	0.977	0.5257	0.906	0.3391	0.929	0.1365	0.948
		3	0.1586	0.946	0.1339	0.962	0.1004	0.979	0.5107	0.912	0.3470	0.933	0.1404	0.952
			0.1595	0.945	0.1260	0.965	0.0988	0.980	0.5142	0.914	0.3319	0.936	0.1368	0.955
	60	1	0.1612	0.944	0.1291	0.964	0.0997	0.980	0.4971	0.920	0.3291	0.940	0.1221	0.959
			0.1626	0.944	0.1223	0.966	0.0986	0.981	0.5021	0.917	0.3246	0.942	0.1180	0.961
		2	0.1587	0.946	0.1259	0.965	0.1004	0.979	0.4939	0.921	0.3375	0.941	0.1221	0.960
			0.1599	0.945	0.1187	0.969	0.0988	0.981	0.4988	0.920	0.3324	0.943	0.1180	0.962
		3	0.1505	0.948	0.1214	0.967	0.0992	0.980	0.4804	0.924	0.3311	0.943	0.1229	0.962
			0.1516	0.948	0.1145	0.970	0.0953	0.982	0.4850	0.922	0.3242	0.946	0.1189	0.965

Table S5: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% asymptotic/credible intervals of δ .

n	m	Scheme	ACI-NA ACI-NL		BCI HPD				ACI-NA ACI-NL		BCI HPD			
Prior \rightarrow					1		2				1		2	
			Set-1						Set-2					
40	20	1	1.7446	0.842	0.5288	0.937	0.1772	0.968	3.1385	0.827	0.5632	0.930	0.1939	0.961
			1.8556	0.835	0.5185	0.940	0.1766	0.969	3.3452	0.819	0.5523	0.932	0.1912	0.962
			1.7288	0.846	0.5270	0.938	0.1761	0.970	3.1260	0.860	0.5526	0.930	0.1923	0.963
		2	1.8381	0.838	0.5103	0.943	0.1754	0.971	3.3310	0.825	0.5418	0.935	0.1890	0.965
			1.8625	0.831	0.5443	0.931	0.1776	0.968	3.1940	0.816	0.5663	0.929	0.1967	0.961
			1.9848	0.823	0.5304	0.933	0.1760	0.969	3.4046	0.807	0.5517	0.931	0.1954	0.961
	30	1	1.3566	0.871	0.5245	0.939	0.1668	0.973	2.5070	0.852	0.5606	0.933	0.1876	0.965
			1.4126	0.863	0.5122	0.943	0.1628	0.975	2.6149	0.843	0.5468	0.937	0.1869	0.966
			1.3529	0.872	0.5211	0.940	0.1663	0.974	2.5054	0.854	0.5492	0.936	0.1874	0.965
		2	1.4086	0.866	0.5092	0.945	0.1623	0.976	2.6131	0.847	0.5346	0.940	0.1852	0.967
			1.4331	0.857	0.5233	0.940	0.1671	0.973	2.5658	0.839	0.5452	0.937	0.1913	0.962
			1.4940	0.846	0.5053	0.946	0.1628	0.974	2.6772	0.828	0.5377	0.939	0.1872	0.965
80	40	1	1.1836	0.889	0.4450	0.954	0.1052	0.983	2.1484	0.868	0.5286	0.948	0.1172	0.980
			1.2205	0.882	0.4269	0.958	0.1040	0.984	2.2180	0.861	0.5256	0.952	0.1169	0.981
			1.1719	0.893	0.4556	0.952	0.1051	0.984	2.1400	0.870	0.5449	0.943	0.1171	0.981
		2	1.2082	0.885	0.4366	0.956	0.1039	0.985	2.2090	0.863	0.5311	0.950	0.1167	0.982
			1.2756	0.877	0.4589	0.951	0.1053	0.983	2.2034	0.856	0.5302	0.951	0.1171	0.980
			1.3169	0.870	0.4393	0.955	0.1043	0.985	2.2753	0.850	0.5259	0.952	0.1170	0.980
	60	1	0.9237	0.907	0.4371	0.959	0.1047	0.985	1.7188	0.885	0.5228	0.953	0.1065	0.984
			0.9425	0.904	0.4202	0.964	0.1037	0.986	1.7554	0.881	0.5156	0.956	0.1060	0.985
			0.9211	0.908	0.4365	0.960	0.1010	0.988	1.7177	0.886	0.5116	0.958	0.1063	0.985
		2	0.9398	0.905	0.4185	0.967	0.1000	0.988	1.7542	0.882	0.5080	0.961	0.1058	0.986
			0.9804	0.903	0.4429	0.957	0.1048	0.985	1.7673	0.880	0.5202	0.954	0.1067	0.984
			1.0010	0.902	0.4257	0.966	0.1037	0.986	1.8053	0.879	0.5199	0.956	0.1059	0.985

Table S6: The ACLs (1st column) and CPs (2nd column) of 95% asymptotic/credible intervals of $R_1(t)$.

n	m	Scheme	ACI-NA ACI-NL		BCI HPD				ACI-NA ACI-NL		BCI HPD			
Prior \rightarrow					1		2				1		2	
			Set-1						Set-2					
40	20	1	0.0878	0.948	0.0610	0.967	0.0529	0.974	0.2394	0.928	0.1361	0.948	0.0955	0.956
			0.0876	0.948	0.0624	0.966	0.0530	0.974	0.2381	0.929	0.1372	0.947	0.0956	0.956
			0.0834	0.952	0.0581	0.970	0.0485	0.977	0.2324	0.933	0.1341	0.951	0.0950	0.959
		2	0.0831	0.953	0.0592	0.969	0.0500	0.976	0.2312	0.934	0.1351	0.950	0.0953	0.958
			0.0878	0.948	0.0611	0.967	0.0513	0.975	0.2377	0.929	0.1342	0.949	0.0970	0.957
			0.0871	0.950	0.0620	0.966	0.0515	0.975	0.2364	0.930	0.1354	0.948	0.0973	0.957
	30	1	0.0811	0.961	0.0494	0.976	0.0462	0.980	0.2246	0.937	0.1195	0.955	0.0715	0.965
			0.0810	0.961	0.0515	0.975	0.0479	0.979	0.2231	0.938	0.1226	0.953	0.0719	0.964
			0.0758	0.963	0.0513	0.975	0.0377	0.986	0.2210	0.939	0.1160	0.954	0.0713	0.970
		2	0.0755	0.964	0.0531	0.972	0.0380	0.985	0.2197	0.941	0.1201	0.952	0.0716	0.970
			0.0801	0.962	0.0531	0.972	0.0427	0.983	0.2239	0.938	0.1186	0.953	0.0724	0.968
			0.0799	0.962	0.0546	0.969	0.0440	0.982	0.2225	0.939	0.1216	0.952	0.0727	0.967
80	40	1	0.0619	0.967	0.0459	0.979	0.0374	0.986	0.1682	0.945	0.1006	0.959	0.0380	0.978
			0.0615	0.968	0.0482	0.977	0.0377	0.986	0.1677	0.946	0.1029	0.958	0.0383	0.978
			0.0586	0.970	0.0445	0.980	0.0359	0.989	0.1630	0.949	0.0995	0.960	0.0375	0.981
		2	0.0583	0.970	0.0463	0.978	0.0363	0.988	0.1626	0.949	0.1021	0.958	0.0378	0.980
			0.0613	0.968	0.0460	0.979	0.0361	0.988	0.1669	0.947	0.1012	0.959	0.0381	0.978
			0.0610	0.969	0.0477	0.978	0.0365	0.987	0.1664	0.947	0.1043	0.956	0.0384	0.977
	60	1	0.0570	0.973	0.0414	0.984	0.0355	0.988	0.1581	0.951	0.0979	0.961	0.0322	0.983
			0.0566	0.974	0.0427	0.982	0.0360	0.987	0.1576	0.952	0.1000	0.960	0.0326	0.981
			0.0530	0.977	0.0388	0.986	0.0331	0.990	0.1555	0.955	0.0972	0.963	0.0321	0.983
		2	0.0528	0.976	0.0401	0.985	0.0337	0.989	0.1551	0.955	0.0992	0.962	0.0324	0.983
			0.0563	0.974	0.0400	0.985	0.0357	0.989	0.1576	0.952	0.0980	0.963	0.0325	0.983
			0.0561	0.975	0.0416	0.984	0.0362	0.987	0.1572	0.952	0.1005	0.961	0.0329	0.981